

Doi: doi.org/10.70693/rwsk.v1i2.658

交流电路理论分析的数学化路径

付亚坤¹ 于晟伟^{1*} 何永明¹

(¹ 中国消防救援学院, 北京 北京 102202)

摘要: 高等数学是近代数学的基础, 它具有高度的抽象性、严密的逻辑性和广泛的应用性。作为各类非数学专业必修的基础课, 高等数学的学习对理工科后置课程的学习与理解起到了至关重要的作用。在电学的相关课程特别是《电工与电子技术》《电路基础》等专业基础课程中, 本文从高等数学与电学的交叉视角出发, 阐述高等数学的概念和方法如何帮助构建交流电路模型, 提高分析的效率和准确性^[2], 探讨复数、微分方程、傅里叶变换、拉普拉斯变换等数学工具在交流电路建模与分析中的应用。通过建立电路行为的数学描述框架, 揭示数学抽象与物理现象之间的内在关联, 为复杂电路系统的设计与优化提供理论支撑。通过数学工具的灵活应用将抽象复杂的电路分析简单化, 让知识的融合更加生动, 不仅便于学生理解, 而且在增加课堂的趣味性上发挥了作用。

关键词: 高等数学; 正弦函数; 傅里叶级数; 复变函数; 交流电路

一、引言

高等数学是非数学专业开设的一门专业基础必修课。作为一门基础学科, 高等数学不仅是学好其他专业课程的前提和保障, 还是很多后续课程的基础和工具, 在许多学科领域里都有着重要的应用。在《电工与电子技术》《电路基础》等电学基础课中对于诸多知识的分析中高频次使用高等数学中诸多的知识点。交流电路作为现代电力系统与电子设备的核心载体, 其动态特性涉及电压、电流的周期性变化与能量传递的复杂关系。传统经验分析方法难以解决动态过程建模(如瞬态响应与稳态振荡), 非线性元件特性描述(如电容、电感与半导体器件)多频信号叠加效应分析等问题, 高等数学通过提供形式化语言与定量工具, 构建从微观元件特性到宏观系统行为的桥梁, 充分应用傅里叶级数、相量、微积分等数学的方法对交流电模型进行描述, 分析交流电路的特性^[3], 在计算分析及拓展研究中综合应用中, 使抽象的交流电路理论有了具体的数学模型, 简化了计算分析过程, 对于学生的理解和深入学习提供强大的助力。

二、交流电模型与正弦函数的关系

(一) 交流电的定义与模型

在电学的定义中, 交流电是一种周期性反转方向并不断改变其大小的电流(电压), 根据这个定义在数学中只要符合周期性和正负交替变化的函数均可以作为交流电的模型来使用。如图 1 所示的各函数所表示的波形均符合交流电的定义, 这就为交流电的特性分析提供了更多的模型可供选择。

(二) 交流电的产生与正弦函数

在生活中交流电是由交流发电机利用电磁感应原理产生, 其本质如图 2 所示, 同机座固定在一起的磁极构成定子, 与转动轴铁芯、线圈固定在一起构成转子共同作用, 当转子以 ω 角速度转动 1 周时, 线圈的两个边各转动经过一次 N 极和 S 极, 并且因切割磁力线而产生感应电动势, 根据右手定则可知, 线圈经过 N 极和 S 极时, 感应电动势的方向相反, 且经过 N 极和 S 极时, 线圈垂直切割磁力线, 这时, 感应电动势最

[作者简介]

[1]付亚坤(1981—), 男, 湖北襄阳人, 中国消防救援学院副教授。

[2]于晟伟(1995—), 男, 吉林长春人, 中国消防救援学院讲师, 北京航空航天大学博士研究生。

[3]何永明(1978—), 男, 江西南昌人, 中国消防救援学院教授。

大, 线圈经过中心位置时, 不切割磁力线, 不产生感应电动势, 所以转子每转 1 周, 感应电动势的方向和大小就变化 1 周, 即感应电动势作周期性变化。若线圈起始位置角度为 φ (初相角), 则线圈产生的电压 (感应电动势) 为

$$u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$$

我们将其称之为电压的瞬时值表达式。

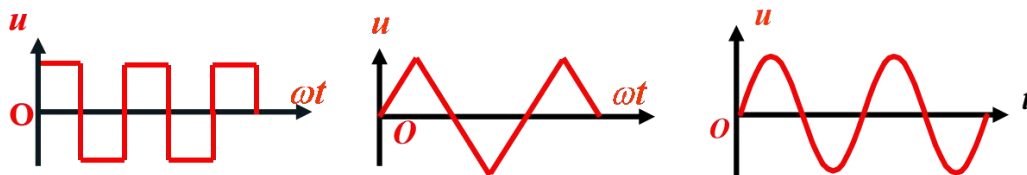


图 1 可以表示交流电的函数图形

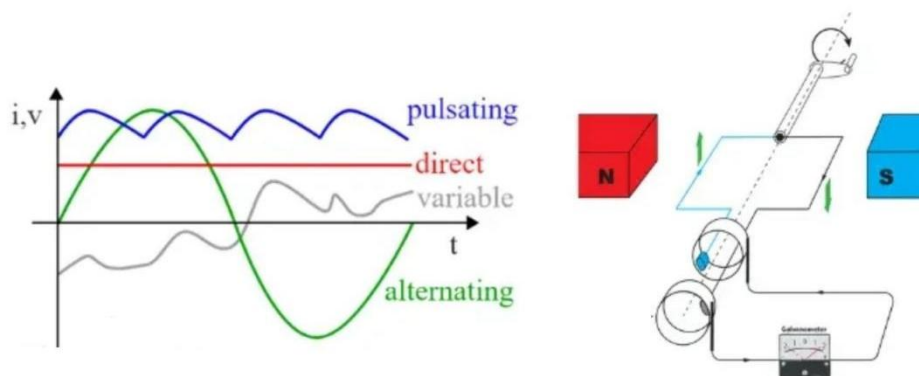


图 2 交流电产生与正弦函数

从上述描述中可以发现, 交流的发电机产生交流电的过程与正弦函数的产生过程在形式上具有一致性, 发电机中的闭合线圈对应有向线段, 发电机的定子磁极所对应的圆周则与有向线段角度变化时的轨迹对应, 得到交流电的图像模型正是正弦函数图形, 所以交流电压的表达式采用正弦函数的形式来表示, 同理交流电流亦是如此, 电流的瞬时值表达式为

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$$

于是我们将以三角函数为表达式的交流电称为正弦交流电。在授课过程中, 结合数学中非常经典的旋转的有向线段图向学员讲解正弦交流电的产生过程, 对于学生理解交流电的产生和特性有着较为有效的辅助作用, 同时为后续的交流电路参数的分析方法选择埋下伏笔。

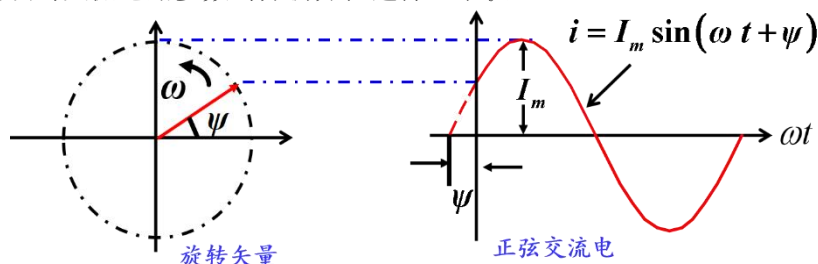


图 3 复数与正弦交流电

(三) 交流电的其他形式与正弦函数

正弦交流电只是交流电中的一种形式, 在自然界中存在的各种电信号都可以看作以交流信号的形式存在, 想要对任意交流信号进行分析, 就用到了高等数学中非常重要的傅里叶级数以及极限的思想。傅里叶级数理论告诉我们, 任何周期函数都可以表示为不同频率的正弦和余弦函数的和。以方波为例, 其按照傅里叶级数对方波函数进行变换, 即

$$u = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_{km} \sin(k\omega t + \psi_k)$$

$$= \frac{U_m}{2} + \frac{2U_m}{\pi} \left(\sin\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \frac{1}{5}\sin 5\omega t + \dots \right)$$

将表达式以图形的方式可表示为

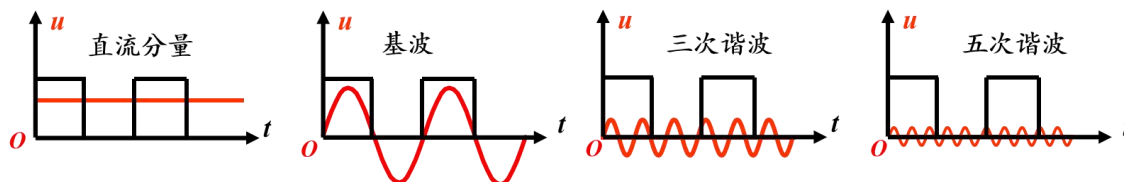


图4 方波函数的分解图形

将图4中的直流分量、基波和足够多的谐波进行叠加,得到一个近似方波。虽然理论上需要无限个谐波才能完全表示方波,但在实际应用中,通常取前几项即可满足精度要求。由此可见,各类交流电信号均可采用傅里叶变换将其分解为多频率、多幅值正弦交流信号的叠加,为进一步分析提供了便利。

三、交流电物理量与复数的应用

(一) 复数运算法则与交流电参数分析

各类电信号均可分解为正弦交流信号的叠加,因此在对正弦量进行定量分析过程中,常常需要对正弦量进行加减乘除运算,这就涉及三角函数的和差化积、积化和差知识,计算过程繁琐^[12],出错概率较大,对学生三角函数解析能力提出了挑战。再加上三角函数的幅值、频率和初相位三个参数参与计算分析的全过程,让交流电路性质分析的难度增加。

然而,我们注意到三角函数两同频率正弦量叠加,表述为

$$A\sin(\omega t + \alpha) + B\sin(\omega t + \beta)$$

$$= (A\cos\alpha + B\cos\beta)\sin\omega t + (A\sin\alpha + B\sin\beta)\cos\omega t$$

叠加前后相位和幅值发生变化,而频率不发生改变,且该计算过程服从复数运算法则。在非变频交流电路中,电路中电流和电压频率相同,在任意时刻两者的频率均不会发生改变,所以在分析时分析的重点放在幅值和相位上,忽略频率这个参数。三角函数运算时的特性与正弦交流电路中的特性再一次对应,可以利用复数进行正弦量之间的计算,三角函数的复杂计算则转化为复数的四则运算^[5],将复数的知识点应用于交流电路物理量的分析中。

(二) 相量的概念

为了简化交流电路的分析,将复数引入电学,用复数表示的正弦交流电路物理量被称之为“相量”。相量是表示正弦交流电物理量大小和相位的矢量^[1],是仅用于电学中的概念。交流电路中电流和电压的三角函数表达式与电流和电压相量分别表示为:

$$u = U_m \sin(\omega t + \varphi) \quad \Rightarrow \quad \dot{U}_m = U_m \angle \varphi \quad \text{或} \quad \dot{U} = U \angle \varphi$$

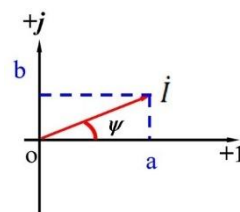
$$i = I_m \sin(\omega t + \psi) \quad \Rightarrow \quad \dot{I}_m = I_m \angle \psi \quad \text{或} \quad \dot{I} = I \angle \psi$$

电压的相量符号为 $\dot{U}_m$, 读作电压的相量,同理电流的相量符号为 $\dot{I}_m$, 读作电流的相量^[1]。除极坐标表示法之外,结合复数的表示方法,以电流相量为例,还可表示为

三角函数式: $\dot{I} = I(\cos\psi + j\sin\psi)$

指数式: $\dot{I} = Ie^{j\psi}$ (由欧拉公式得到)

代数式: $\dot{I} = a + jb$, 其中 $a = I\cos\varphi$, $b = I\sin\psi$ (如右图)



为了区分复数中的虚部 j 和交流电路中的电流 i ,在相量中的虚部我们用 j 表示。

上式中 I_m 表示最大值, I 表示有效值 (平均值), 它们之间的数量关系由其热效应和功率比较来确定。在这里应用到了高数中的积分,以正弦交流电为例: 假设交流电 i 和直流电 I 通过相同的电阻,在相等的时间

内产生相等的热量, 则直流电的数值即为交流电的有效值, 用数学表达式表示为

$$\int_0^T i^2 R dt = I^2 R T$$

将 $i = I_m \sin(\omega t + \psi)$ 表达式带入上式, 可求得在正弦交流电路中 $I_m = \sqrt{2}I$, 同理 $U_m = \sqrt{2}U$ 。

(三) 使用相量应注意的问题

同时我们注意到, 在交流的分析中, 各类符号的大小写在不停地变化着。需要明确的是小写字母表示交流电的物理量, 可以理解为它随时间变化而变化; 大写字母表示直流电物理量, 可以理解为恒定的量; 而相量是大写字母上带点的物理量。

需要注意的是, 相量是仅在电学中存在的概念, 且仅有电压和电流这两个物理量, 电压和电流的相量表达式和瞬时表达式两者之间并不是相等的关系, 相量只能用来表征在某一时刻电路中电压和电流的状态, 这一点在课堂上是需要反复强调的。

四、相量分析法与交流电路的分析

为了交流电路的分析更加简洁便利, 应用了相量的概念, 利用相量进行交流电分析的方法称为“相量分析法”^[5]。

相量分析法的基础是电路中各元件模型电流和电压的关系相量参数进行。在研究电阻 R 、电感 L 、电容 C 三个基本元件上电流与电压关系时, 我们知道

电阻元件 R : 电阻描述的是消耗电能的性质, 电流 $i = I_m \sin(\omega t + \psi)$ 的交流电路中电阻上电压与电流的关系为: $u = iR$, 用相量表达式表示为: $\dot{U}_R = \dot{I}_R R$, 所表达的含义分为两个部分: 一是电压和电流符合欧姆定律的数量关系, 即 $U = IR$; 二是电阻上的电压和电流同相位, 也就是说电阻两端电压和流过它的电流之间的相位差为 0。

电感元件: 由于电磁感应现象的存在, 电感元件对于交流电的阻碍作用由交流电的角频率 ω 决定, 电感元件两端电压与电流的关系为

$$u = L \frac{di}{dt}$$

当电感电路中通入 $i = I_m \sin(\omega t + \psi)$ 的正弦交流电, 则电感线圈两端电压的相量表达式表示为

$$\dot{U}_L = j\omega L \dot{I}$$

除了表示电感上的电压和电流的数量关系为 $U_L = I\omega L$ 外, 还利用复数 j 的概念表示出电感上电压的相位超前电流 90° , 也说明当电源的频率 ω 越高, 电感对电流的阻碍越强, 即电感具有通直流, 阻交流的作用。在这里 ωL 定义为感抗 X_L 。

电容元件: 根据电容元件存储电场能的特点, 电容元件对于交流电的阻碍作用也由交流电的角频率 ω 决定, 电容元件两端电压与电流的关系为

$$i = C \frac{du_c}{dt}$$

当在电容电路中通入为 $u = U_m \sin(\omega t + \phi)$ 的正弦交流电压时, 电压和电流关系用向量相量表达式表示为

$$\dot{U}_C = \frac{-j\dot{I}}{\omega C}$$

表达式表明电容上的电压和电流的数量关系为 $U_C = I/\omega C$ 外, 同时也表示出电容上电压的相位之后于电流 90° , 亦可知电源的频率 ω 越高, 电容对电流的阻碍越弱, 即电容具有阻直流, 通交流的作用。在这里 $1/\omega C$ 定义为容抗 X_C 。

在交流电路分析过程中为了可以简化分析, 通常在相量关系的基础上借助复数的极坐标图形, 将同频率的正弦量相量画在同一个复平面中 (极坐标系), 并将之称为相量图。以电阻 R 、电感 L 、电容 C 串联的电路中 (如图 5 所示), 通过的电流为 $i = I_m \sin(\omega t + \psi)$ 交流电。该电路中三个元件上电流相同, 因此在向量图中则会以电流的相量为参考依据, 画出各元件电流、电压的相量关系图, 如图 6 (a) 所示。在相量分析中, 更加注重电流和电压之间的相位关系, 对初相位的关注相对较少, 因此在作图时忽略实轴与虚轴的限制, 以选取的参考相量为基准, 将图 (a) 画为图 (b)。

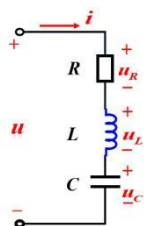


图5 RLC 串联电路

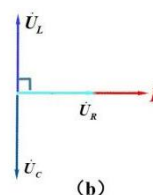
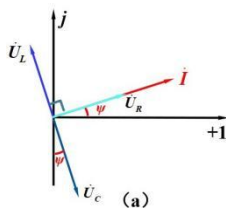
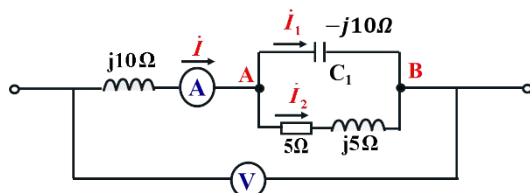


图6 相量分析图

上述三个元件在电路中进行自由组合形成阻抗 Z ，其表达式为： $Z = R + j(X_L - X_C)$ ，其中 $X_L = \omega L$ 称为感抗， $X_C = \frac{1}{\omega C}$ 称为容抗。阻抗是复数，因此阻抗的模 $|Z| = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$ ，幅角 $\varphi = \tan^{-1} \frac{X_L - X_C}{R}$ 。阻抗的模表示阻抗的大小，阻抗的幅角则表示阻抗两端电压与电流之间的相位差，即 $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ 。阻抗等同于直流电路中电阻的角色，其在电路中串并联计算规则与等效电阻一致，计算过程则需按照复数的计算法则进行。需要强调的是阻抗是复数，而不是相量。

在交流电路的分析中，利用各元件在交流电路中电流与电压的数量、相位关系，结合相量图，是一维空间中三角函数式的实数运算转化为二维空间中的相量复数运算，可以简化分析过程，减少较多的计算过程，让分析过程更加清晰。

例：下图电路中已知 $I_1=10A$ 、 $U_{AB}=100V$ ，求：总电压表和总电流表的读数。



从题干不难看出，已知条件中的电流电压均为有效值，所求电压表与电流表的读数也是有效值，在求解过程中不需要进行幅值转换；然后对电路图进行分析，电流表在电路的主干路上，因此所测电流为总电流，电压则是所示图中的总电压，整个电路是由电阻、电容、电感三种原件组合而成，因此计算方法有两种。

解法一：根据相量表示法，利用复数计算完成分析。

第一步 计算 AB 两点间阻抗 Z_{AB} 设 $U_{AB} = 100\angle 0^\circ$ $Z_1 = -j10$ $Z_2 = 5 + j5$

$$\begin{aligned} (Z_1, Z_2 \text{ 并联}) \quad Z_{AB} &= \frac{Z_1 // Z_2}{(5 + j5)} \\ &= \frac{-j10 + 5 + j5}{50} \times (j50) \\ &= 10A \end{aligned}$$

第二步 根据欧姆定律，计算总的电流 $\dot{I}$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_{AB}}{Z_{AB}} = \frac{100\angle 0^\circ}{10} = 10\angle 0^\circ A$$

第三步 计算主干路上电感电压 $\dot{U}_L$

$$\dot{U}_L = \dot{I}(j10) = 100\angle 90^\circ V$$

第四步 根据基尔霍夫电压定律计算总电压

$$\begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}_{AB} + \dot{U}_L \\ &= 100\angle 0^\circ + 100\angle 90^\circ \\ &= 100\sqrt{2}\angle 45^\circ V \end{aligned}$$

由此可得电压表的读数为 141.4V，电流表读数为 10A。

解法二：根据各元件电流、电压相量关系，结合相量图（见图 7）完成分析过程。

第一步 令 $Z_1 = -j10$ ， $Z_2 = 5 + j5$ ，将其变为极坐标式得到：

$$Z_1 = 10\angle -90^\circ \quad Z_2 = 5\sqrt{2}\angle 45^\circ$$

第二步 以 AB 两点间电压的相量 $\dot{U}_{AB}$ 为参考相量，画相量图标记为①，见图 7(a)。

根据阻抗幅角与电压、电流相位之间的关系， Z_1 为纯电容支路，该支路电流超前电压 90° ，即电流 $\dot{I}_1$ 超前电压 $\dot{U}_{AB} 90^\circ$ ，电流大小 $I_1 = U_{AB} / |Z_1| = 10A$ ，画相量图标记为②。同理可得电流 $\dot{I}_2$ 的相量图，标记为③，由 Z_2 的极坐标表达式不难看出， $\dot{I}_2$ 与 $\dot{U}_{AB}$ 之间的夹角为 45° ，且 $\dot{I}_2$ 滞后于 $\dot{U}_{AB}$ ，电流大小 $I_2 = 10\sqrt{2}A$ ，

此时应注意画图时 I_1 和 I_2 的长度关系。

第三步 由题图知 $\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$, 利用平行四边形法则将电流 $\dot{I}_1$ 和电流 $\dot{I}_2$ 相量进行叠加见图 7(b), 得到 $\dot{I}$, 标记为④, 结合直角三角形相关知识可得 $I=10A$ 。

第四步 总电流 I 流过电感, 则电感上的电压 $\dot{U}_L$ 超前电流 $\dot{I}$ 90° , 电压大小 $U_L=I \times X_L$, 即 $U_L=100$, 与 U_{AB} 大小相等, 在画图时注意两者线段长度相等, 标记为⑤, 见图 7(c)。根据基尔霍夫电压定律知 $\dot{U} = \dot{U}_{AB} + \dot{U}_L$, 将 $\dot{U}_{AB}$ 和 $\dot{U}_L$ 叠加, 得到 $\dot{U}$, 相量图标记为⑥, 并求得 $U=100\sqrt{2}V$ 。

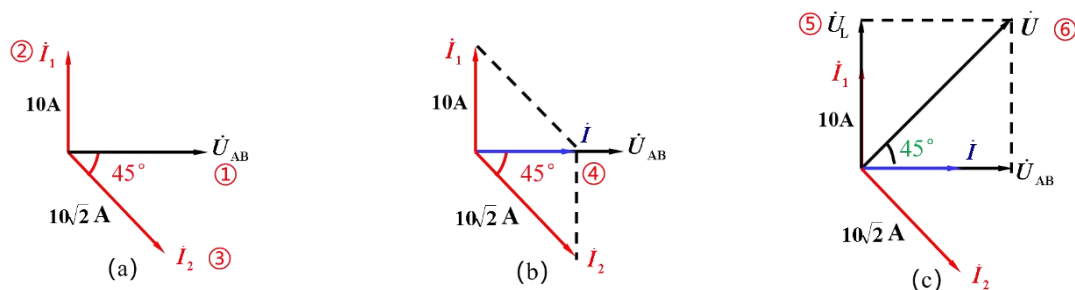


图7 相量图分析全过程

以上两种分析方法, 在理解交流电路电压、电流关系的前提下, 首先都定义了参考相量, 然后根据利用各支路与电压、电流之间的大小、相位关系, 分别应用了复数的四则运算和复数的图形分析法最终求得了相关的结果。方法一适用范围更加广泛, 但计算过程容易出现错误; 方法二利用相量图结合简单的计算完成分析, 过程更加直观简便, 但遇到幅角复杂时便不宜使用了。

对于交流电路除了对电压、电流的分析之外, 对于交流电路还需要分析电路的有功功率、无功功率以及视在功率, 结合功率的定义式均利用积分的思想进行计算分析。

五、结论

交流电路基本原理的学习中, 从对线圈切割磁力线实验探索交流电与正弦函数的关系^[9], 将正弦函数的三要素赋予了具体的物理意义, 把抽象的理论知识具象化; 在交流电的分析中, 不仅抓住三角函数与复数之间的关系, 而且紧扣电路中频率不发生变化这一关键, 将复数引入电学成为新的概念; 通过模和幅角与交流电中的幅值和初相位的对应关系, 明确了复数的实际应用。除此之外, 在分析过程中反复用到傅里叶级数、积分、微分等多个数学知识点, 更加体现了数学知识在众多专业中的重要性。在电学专业的所有专业课程中, 都离不开高等数学的知识。高等数学为专业服务的同时, 也通过专业知识对抽象的数学概念和方法赋予了实际意义。

参考文献:

- [1] 秦曾煌. 电工学(上)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2021.
- [2] 李静霞. 高等数学在人工智能中应用的探究[J]. 创新创业理论与实践, 2024, 11(22): 106-111.
- [3] 欧阳陶弢. 浅谈高等数学在电工电子中的实际应用[J]. 教研探讨, 2017, 7: 186-187.
- [4] 王宏, 薛燕, 史雪飞. 交流电路分析与相量法的教学体会[J]. 教育教学论坛, 2019, 1(1): 185-187.
- [5] 左全生. 对正弦电路中引入相量分析法的探讨[J]. 电子世界, 2018, 15: 39-40.
- [6] 李婷婷. 高等数学在电学上的几个应用[J]. 高校理科研究, 2015, 12(1): 121-122.
- [7] 卢厚元, 李波. 高等数学融入专业群课程体系建设的实践探索-以湖工职院高等数学与电子信息类专业的融合为例[J]. 湖北工业职业技术学院学报, 2022, 5: 76-80.
- [8] 马玉峰. “向量法”在高等数学上的应用[J]. 甘肃高师学报, 2013, 5(18): 71-72.
- [9] 黄跃萍. 正弦交流电相关数学知识讲解浅析[J]. 科技视觉, 2023, 4: 181-183.
- [10] 刘汉明. 切割类感应电动势计算归类分析[J]. 中学生理科应试, 2021, Z1: 45-48.
- [11] 姬芳芳. 相量法在正弦稳态电路中的应用研究[J]. 唐山师范学院学报, 2021, 43(6): 26-31.
- [12] 方志平. 利用复数求解三角函数问题[高中数学教与学. 2022, 9: 13-16.
- [13] 牛腾. 对正弦交流电路教学的一点思索[J]. 西北职教, 2015, 1: 52-53.
- [14] 陈建辉. Multisim 软件在《电工学》教学中的应用[J]. 信息与电脑, 2018, 9: 104-106.

The Mathematical Path of Theoretical Analysis of Communication Circuits

Fu Yakun¹, Yu Chengwei^{1*}, He Yongming¹

¹ China Fire and Rescue Institute, Beijing 102202, China

Abstract: Advanced mathematics is the foundation of modern mathematics, which has a high degree of abstraction, rigorous logic, and wide applicability. As a compulsory basic course for various non mathematics majors, the study of advanced mathematics plays a crucial role in the learning and understanding of post courses in science and engineering. In the relevant courses of electricity, especially in professional foundation courses such as "Electrician and Electronic Technology" and "Fundamentals of Circuits", this article starts from the perspective of the intersection of advanced mathematics and electricity, and elaborates on how the concepts and methods of advanced mathematics can help construct AC circuit models, improve analysis efficiency and accuracy [2], and explore the application of mathematical tools such as complex numbers, differential equations, Fourier transform, Laplace transform, etc. in AC circuit modeling and analysis. By establishing a mathematical description framework for circuit behavior, the intrinsic relationship between mathematical abstraction and physical phenomena is revealed, providing theoretical support for the design and optimization of complex circuit systems. By flexibly applying mathematical tools, abstract and complex circuit analysis is simplified, making the integration of knowledge more vivid. This not only facilitates students' understanding, but also plays a role in increasing the fun of the classroom.

Keywords : Advanced mathematics; Sine function; Fourier series; Complex function; Communication circuit