

初中数学配方法为什么重要？

王明杨¹

(1.杭州师范大学, 浙江 杭州 3210000)

摘要:配方法是贯穿数学学习全过程的核心思想方法,在初中阶段不仅是解一元二次方程的通法,更是连接初等数学与高等数学的重要纽带。本文通过分析人教版、北师大版和浙教版教材的编排特点,探讨配方法在知识体系中的衔接作用。研究发现:教材编排存在“从一般到特殊”与“从特殊到一般”两种逻辑路径;配方法不仅是求根公式和二次函数研究的基础,更贯穿小学几何直观到大学微积分、线性代数的学习进程。

关键词:配方法;初中数学;知识衔接

DOI: doi.org/10.70693/rwsk.v1i6.1104

一、问题提出

配方法作为贯穿数学学习全过程的重要思想方法^[1],其应用颇为广泛。在初中数学中,它不仅是求解一元二次方程的通法,也是二次根式的灵活变形的重要手段,更是探究二次函数最值问题的核心方法。在高等数学领域,配方法的应用进一步拓展——从三角函数的恒等变换到最小二乘法的优化计算,再到多元二次函数的极值分析,其思想精髓在不同数学分支中持续深化^[2]。配方法作为连接初等数学与高等数学的重要纽带,将处于不同学段、不同模块中的知识衔接起来,在知识螺旋上升的过程中发挥着重要的桥梁作用。

然而,在当前的初中数学教学实践中,配方法通常仅被视作求解方程的一种工具性技能,而忽视配方法作为数学思想方法的深刻价值。这种现象不仅影响学生对二次根式本质的理解,也为后续学习二次函数带来了潜在困难。作为第四学段“数与代数”模块的制高点,二次函数既是初中阶段代数知识的系统整合,更是培养学生数学建模素养的重要载体。因此,只有从思想方法的高度把握配方法的教学,引导学生真正领悟其原理与应用逻辑,才能为后续二次函数乃至更高层次的数学学习中构建可持续发展的认知框架。

二、教材编排

在不同版本的教材中,配方法的编排方式不尽相同,本文选取人教版、北师大版和浙教版教材进行系统对比分析,通过比较其在编排位置、课时分配、知识脉络和引入方式等方面的异同,深入探究不同教材对“配方法”的处理特点,以期为教学实践提供更全面的参考。

(一) 内容编排

在编排位置方面,三版教材呈现出明显的差异性。人教版与北师大版教材均将“配方法”编排在九年级上册的“一元二次方程”章节中,而浙教版教材则将其提前编排至八年级下册。这种编排位置的差异反映了对学生认知发展水平的不同考量:前两版教材基于九年级学生已具备较强的抽象思维和运算能力,将这一难点内容后置;而浙教版则通过提前引入、循序渐进的方式,为学生预留更充分的消化吸收时间。

在课时安排方面,这种差异依然存在。人教版与北师大版教材均为“配方法”设置1个标准课时,而浙教版教

作者简介:王明杨(1998—),女,硕士研究生,研究方向为初中数学教与学、学习路径。

材则在此基础上,增加了0.5课时以巩固配方法的学习。在课时分配的差异化编排既体现了浙教版对低年级学生认知特点的关照,也反映了其“小步走、多巩固”的教学理念。

在知识脉络构建方面,三版教材呈现出两种典型路径。人教版和北师大版教材采用“从一般到特殊”的逻辑顺序:先系统学习配方法这一通用解法,再推导出公式法,最后学习因式分解法这一特殊解法。与之形成鲜明对比的是,浙教版采用“从特殊到一般”的逆向思维:从学生已有的因式分解知识出发,通过逆运算引入因式分解法,再逐步过渡到更具一般性的配方法和公式法。这种差异体现了教材编写者对数学知识建构逻辑的不同理解。

通过对比分析可见,人教版和北师大版在配方法的编排上保持了高度一致性,而浙教版则展现出独特的教学设计思路。三版教材对“配方法”的具体内容编排详见表1,这些差异为教师根据不同学情选择适宜的教学策略提供了宝贵的参考依据。

表1 三版教材“配方法”内容编排

	人教版	北师大版	浙教版
编排位置	九年级上册第1章	九年级上册第2章	八年级下册第2章
课时安排	1课时	1课时	1.5课时
知识脉络	配方法→公式法 →因式分解法	配方法→公式法 →因式分解法	因式分解法→开平方法 →配方法→公式法

(二) 引入方式

在初中数学教材的编排中,配方法作为解一元二次方程的重要方法,各版本教材采用了不同的引入策略。通过对比人教版、北师大版和浙教版教材,可以发现它们在知识衔接和教学设计上各具特色。三版教材对“配方法”的引入方式详见表2。

表2 三版教材“配方法”引入方式

教材版本	引入方式
人教版	问题1: 解方程 $10 * 6x^2 = 1500$. 探究: 对照“问题1”中解方程的过程, 你认为应该怎样解方程 $(x + 3)^2 = 5$? 探究: 怎样解方程 $x^2 + 6x + 4 = 0$?
北师大版	问题1: 你能解哪些特殊的一元二次方程? 问题2: 你会解下列一元二次方程吗? 你是怎么做的? $x^2 = 5$ 、 $2x^2 + 3 = 5$ 、 $x^2 + 2x + 1 = 5$ 、 $(x + 6)^2 + 7^2 = 10^2$. 问题3: 你能解方程 $x^2 + 12x - 15 = 0$ 吗? 你遇到的困难是什么? 你能设法将这个方程转化成上面方程的形式吗? 与同伴进行交流
浙教版	你能将方程 $x^2 - 10x = -16$ 转化成 $(x + a)^2 = b$ 的形式吗? 请尝试解这个方程.

人教版教材采用案例引导式的任务设计,从实际情境中具体的方程实例出发,逐步化简变形得到这一可开平方的方程形式,再类比推广到更一般的形式,即让学生思考的解法,整个设计层层递进,环环相扣。人教版并未明确区分开平方法,而是将其作为配方法的一个特例来处理。采用从具体到抽象的设计思路,引导学生在解题过程中自然领悟配方法的本质。

北师大版教材的任务设计则更注重探究发现式的教学理念。在正式引入配方法之前,先充分调动学生的思维,通过设问“你能解哪些特殊的一元二次方程?”启发学生回顾已有知识,引导学生自主发现开平方法的适用条件,进而探索一般方程的配方法。接下来的问题设计严格遵循“循序渐进”的教学原则,采用阶梯式递进的教学策略,

首先从最基础的直接开平方就能解决的方程入手；接着过渡到需要简单代数变形的开平方问题；再到完全平方公式的基本变形；最后进阶至配方法的初步形态。这种“由简入繁、由易到难”的精心设计，既符合学生的认知发展规律，又能有效引导学生通过自主探究，逐步发现并掌握一般一元二次方程的通用解法。

浙教版教材采用问题驱动式的任务设计，通过提问“你能将方程转化成的形式吗？”引导学生思考，进而引入配方法的定义。在浙教版的编排中，先系统讲解开平方法，将其单独作为求解一元二次方程的解法来学习，再自然过渡到配方法，这种从特殊到一般的编排逻辑，使学生在掌握型方程解法的基础上，循序渐进地学习更一般的配方技巧，体现了良好的知识衔接性。

可以看出，在知识体系构建方面，浙教版采用显性的“开平方法→配方法”递进式编排，人教版采用隐性的案例渐进式编排，而北师大版则采用启发探究式编排。尽管编排策略不同，三版教材都遵循了“由易到难”的教学原则，最终都指向配方法的核心思想：通过代数变形将一般方程转化为可开平方的形式。在教学方法上，浙教版侧重知识结构的系统性，人教版注重解题过程的示范性，北师大版则强调学生的自主探究性。这种多元化的教材设计，为教师提供了丰富的教学资源，也体现了数学教学在统一课程标准下的多样性发展。教师在具体教学中，可根据学情灵活借鉴不同版本的设计思路，以实现最佳的教学效果。

三、核心作用

配方法是初中数学中一种基础而重要的代数方法，其核心地位体现在多个方面。作为解一元二次方程的通法，配方法不仅是求根公式的推导基础，也是理解方程解的结构的关键。通过将一般式 $y = ax^2 + bx + c$ 转化为完全平方形式，配方法不仅提供了一种普适的解法，也为后续公式法的建立奠定了逻辑基础。求根公式 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ 的推导过程正是配方法的直接应用，而根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ 也自然地从此过程中衍生出来，成为判断方程实数根存在性的依据。此外，韦达定理的证明同样依赖于求根公式，而求根公式的源头仍是配方法，这进一步凸显了配方法在代数推理中的核心作用。

配方法的重要性不仅体现在解方程上，更在于它与二次函数学习的紧密联系。《义务教育数学课程标准（2022年版）》明确要求学生“会用配方法将数字系数的二次函数的表达式化为 $y = a(x - h)^2 + k$ 的形式。”从而分析函数的图象特征，如顶点坐标、对称轴、最值等。二次函数从一般式 $y = ax^2 + bx + c$ 变换为 $y = a(x - h)^2 + k$ 顶点式的转换过程，本质上是配方法的运用。这一转换不仅帮助学生直观理解函数的几何性质，也为后续高中阶段研究抛物线的平移、极值等问题奠定了基础。同时，新课标强调“二次函数与一元二次方程的关系”，而配方法正是连接两者的重要桥梁，使得学生能够从代数与几何两个角度理解二次问题的本质。

从教学逻辑来看，配方法的学习贯穿初中数学的核心知识体系。它既是对先前所学完全平方公式、二次根式等知识的综合运用，又为后续二次函数、根的判别式、韦达定理等高阶内容提供方法论支持。在解一元二次方程的各种方法中，因式分解法和开平方法虽然简便，但适用性有限，而配方法与公式法作为通法，能够适用于所有情况。其中，公式法本质上是配方法的标准化表达，因此配方法在解法体系中具有更基础的地位。此外，配方法所蕴含的代数变形思想，如“补项凑方”的策略，不仅适用于方程和函数，还在后续的数学学习中（如高中导数、不等式证明）反复出现，是数学思维训练的重要组成部分。

四、衔接作用

（一）与小学知识的衔接

1. 几何基础：从直观认识到代数表达

在小学阶段，学生通过几何直观与简单方程的学习，为初中配方法的理解奠定了重要基础。一方面，在小学阶段学生通过丰富的几何活动学习数学，以建立完整的面积概念体系。学生通过计算边长为整数的正方形面积（如 $3 \times 3 = 9$ ），直观理解平方数的几何意义，这种具象认知为后续代数中的平方运算提供了思维基础。另一方面，学

生在计算组合图形面积时,学生掌握了“补全”的策略^{[3][4]}。如图1,求边长为5的正方形缺失一个 2×3 矩形后的面积,学生会将这个组合图形补全为一个正方形,这种几何补全思想直接对应配方法中“补常数项”的代数操作。

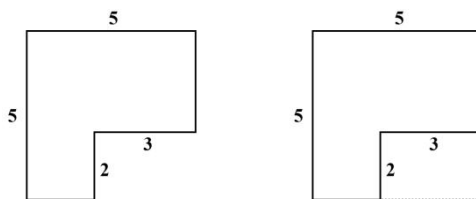


图1“补全”策略求组合图形面积

2. 方程思想: 从算术解法到代数思维

新课标对数学内容的编排进行了优化,将正式的系统性方程学习安排在初中阶段,如一元一次方程,但小学阶段仍然强调代数思维的早期渗透。首先,重点培养等式变形的意识。此时学生掌握的“保持等式平衡”原则,成为后续方程变形的基础规范,如通过逆运算解决如 $3x+5=20$ 这类问题。其次,将问题复杂化,培养学生的代数表征能力,出现如“两个连续自然数的和是15”这类需要设未知数的问题,这种将文字问题转化为方程的经验,直接服务于二次方程的应用题解决。最后是思维过渡的关键阶段,在解决“矩形周长固定求最大面积”问题时,虽然小学用枚举法,但已蕴含极值思想,这为后续学习配方法求二次函数最值埋下伏笔。

纵观小学代数思维的认知发展轴线,从算术具体运算到简单代数表征,再到复杂方程变形,这一发展过程表明,配方法的出现不是孤立的技能传授,而是学生代数思维发展的必然结果。当学生积累足够的方程变形经验后,解决二次方程的配方法就成为了思维发展的自然延伸。

(二) 与高等数学的衔接

1. 微积分中的应用

以函数 $f(x) = 2x^2 - 8x + 5$ 为例,通过配方得 $f(x) = 2(x-2)^2 - 3$,直接读出顶点 $(2, -3)$ 。当然也可以通过求导,得 $f'(x) = 4x - 8$,令 $f'(x) = 0$,解得 $x = 2$ 。两种方法所得结论完全一致,但配方法提供了更直观的几何解释,这种对应关系使学生理解,导数为零的点本质上是函数图像的“顶点”,而配方正是揭示这一特性的代数工具^[5]。在多元函数极值问题中,这种思想进一步推广到Hessian矩阵的正定性判定。

此外,配方法也是积分运算的简化利器。考虑积分 $\int \frac{1}{x^2+4x+13} dx$ 的求解过程,首先将 $x^2+4x+13$ 配方,得到 $(x+2)^2+9$,再将其转化为标准形式 $\int \frac{1}{u^2+a^2} du$,其中 $u = x+2$, $a = 3$,应用公式得 $\frac{1}{3} \arctan(\frac{x+2}{3}) + C$,此类问题在概率论(正态分布)、信号处理(傅里叶变换)等领域频繁出现。数据显示,在工程数学课程中,约65%的有理函数积分需要通过配方完成简化。

2. 线性代数中的高阶推广

二次型的标准化处理,设二次型 $Q(x) = x^T A x$ (其中 $x = [x_1, x_2]^T$),以具体二次型 $Q(x, y) = 5x^2 + 4xy + 2y^2$ 为例,其对称矩阵构造为 $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$,通过正交变换化为标准形 $Q(x) = 6y_1^2 + y_2^2$,其几何意义是将旋转后的二次曲线化为标准方程。若采用初等的配方法处理原二次型,经过逐步配方可以得到 $Q(x, y) = 5(x + \frac{2}{5}y)^2 + \frac{6}{5}y^2$,这一结果虽然形式上与正交变换后的标准形不同^[6],但本质上都实现了消去交叉项 $4xy$ 的目标。这种一致性深刻揭示了配方法通过适当的变量替换实现二次型的对角化的核心思想。

配方法在线性代数中的特殊价值主要体现在三个方面:首先,它为学生理解更抽象的正交变换提供了具体的认知基础;其次,在计算特征值较复杂时,配方法往往能提供更简便的计算途径;最后,这种从初等方法到高等

方法的自然过渡,完美体现了数学知识体系的连贯性。强调配方法与矩阵对角化的内在联系,能帮助学生建立从具体运算到抽象理论的认识通道。这种衔接不仅体现在技术层面,更反映了数学思维从特殊到一般、从具体到抽象的发展规律,是线性代数教学中不可或缺的重要环节。

五、启示

配方法作为数学教育中的关键思想方法,其教学价值主要体现在三个方面。首先是知识体系的贯通性,从小学的几何补全思想到初中的方程求解,再到大学的二次型对角化,配方法构建了连贯的认知链条。其“补项凑方”的策略本质,在不同学段呈现螺旋上升的发展态势。其次是思维发展的奠基性,作为代数变形的典型范例,配方法培养了学生的结构化思维与转化思想,这种思维模式在 STEM 领域具有广泛迁移价值。最后是教学改革的导向性,基于新课标要求,配方法的教学应实现三个转变:从机械训练转向原理探究,从孤立技能转向思想方法,从代数运算转向几何解释。教师需借鉴多版本教材优势,设计梯度性问题链,引导学生体会数学思想的统一性与普适性。

参考文献:

- [1] 宁锐,李昌勇,罗宗绪.数学学科核心素养的结构及其教学意义[J].数学教育学报,2019,28(02):24-29.
- [2] 黄中益.改进讲授方法促使学生乐学[J].中国教育学刊,1997,(01):40-43.
- [3] 汪晓勤.中华优秀传统文化数学文化融入初中数学教学的若干路径[J].教育研究与评论(中学教育教
学),2022,(06):34-39.
- [4] 张俊忠.数学史融入初中数学教育的研究[D].华中师范大学,2015.
- [5] 岳娜莉.学生评教数据的知识挖掘研究[D].天津师范大学,2012.
- [6] 袁健,王菊香.关于线性代数课程中理论和方法具象化的探究[J].科技风,2024,(06):55-57.

Why is the completing the square method important in junior high school mathematics?

Mingyang Wang¹

¹ Jing Hengyi Education College, Hangzhou Normal University, Hangzhou, China

Abstract: The completing the square method is a core idea and approach that runs through the entire process of mathematics learning. In the junior high school stage, it is not only a general method for solving quadratic equations with one variable, but also an important link connecting elementary mathematics and advanced mathematics. This article analyzes the arrangement characteristics of the textbooks of the People's Education Edition, the Beijing Normal University Edition, and the Zhejiang Education Edition, and explores the connecting role of the completing the square method in the knowledge system. The research finds that there are two logical paths in the textbook arrangement: "from general to specific" and "from specific to general". The completing the square method is not only the basis for the study of the root formula and quadratic functions, but also runs through the learning process from the geometric intuition in primary school to calculus and linear algebra in university.

Keywords: Completing the Square; Junior High School Mathematics; Knowledge Transition