AI 支持下数学解题认知负荷的特征分析

钱靓 [1]，张伟红 [1]，沈南山 [2,*]
1. 合肥师范学院，数学与统计学院，安徽 合肥，230601
2. 安徽新华学院，大数据与人工智能学院，安徽 合肥，230088

摘要：认知负荷理论将解题认知负荷划分为内在认知负荷、外在认知负荷与相关认知负荷三类。生成式 AI 介入数学解题，会对三类认知负荷产生阶段化、差异化影响。以一道改编自中考真题的二次函数综合题为载体，采用理论案例分析法，从基础识别、代数推理、创新探究三个解题阶段剖析 AI 对认知负荷的双重作用：AI 可通过步骤拆解、动态可视化降低基础阶段的内在与外在认知负荷；借助追问式交互支架，在探究环节促进相关认知负荷的生成，但同时存在认知卸载、符号输入额外增加外在负荷等风险。研究揭示 AI 辅助数学解题过程中认知加工的变化特征，为合理设计 AI 数学学习提供参考。

关键词：AI 解题；认知负荷；特征分析

Analysis of Characteristics of Cognitive Load in AI-Supported Mathematical Problem Solving

Jing Qian [1], Weihong Zhang[1], Nanshan Shen[2,*]
1. School of Mathematics and Statistics, Hefei Normal University, Hefei, Anhui 230601, China
2 .School of Big Data and Artificial Intelligence, Anhui Xinhua University, Hefei, Anhui 230088, China

Abstract: Cognitive load theory divides the cognitive load of problem solving into three types: intrinsic cognitive load, extraneous cognitive load, and germane cognitive load. The involvement of generative AI in mathematical problem solving exerts phased and differentiated effects on these three types of cognitive load. Taking a comprehensive quadratic function problem adapted from a senior high school entrance examination question as the research carrier, this study adopts the theoretical case analysis method to analyze the dual effects of AI on cognitive load across three problem-solving stages: basic recognition, algebraic reasoning, and innovative inquiry. AI can reduce intrinsic and extraneous cognitive load in the basic stage through step decomposition and dynamic visualization. With the support of interrogative interaction scaffolds, it facilitates the generation of germane cognitive load during the inquiry phase. Nevertheless, risks remain, such as cognitive offloading and extra extraneous cognitive load brought by symbolic input. This study reveals the changing characteristics of cognitive processing in AI-assisted mathematical problem solving and provides references for the rational design of AI-enabled mathematics learning.

Keywords: AI-based problem solving; cognitive load; characteristic analysis

人工智能赋能教育数字化背景下，生成式 AI 工具被广泛应用于数学解题辅助场景。认知负荷理论为分析人机协同解题的思维过程提供重要理论框架[1] 。已有研究证实，不合理的外部辅助会干扰学习者工作记忆资源分配，而适宜的学习支架能够调控内在、外在、相关三类认知负荷，促进图

式的建构[2]。

当前关于 AI 辅助数学学习的研究多集中于工具开发、教学应用模式，针对解题全过程不同阶段，AI 如何改变学习者认知负荷结构的微观分析尚不够充分。AI 究竟是减轻学生认知负担，还是诱发思维惰性，需要结合具体数学例题展开细致剖析。本文选取二次函数综合题作为研究载体，基于认知负荷理论，划分基础识别、代数推理、创新探究三个解题阶段，分析 AI 介入后各类认知负荷的演变特征，辨析技术带来的增益与潜在风险，为 AI 数学教学实践提供理论参考。

1 试题呈现

本文例题改编自 2026 年安徽中考数学第 23 题，试题设置 3 小问，由浅入深、层层递进：

已知抛物线 $y=\frac{3}{a^2}x(2a-x)(a>0)$ 。

（1）求抛物线顶点的纵坐标；

（2）点 $A(x_1,\frac{3}{2}),\ B(x_2,\frac{3}{2}),\ (x_1<x_2)$ 都在抛物线上。

(i) 求 $\frac{x_1}{a}$ 的值；

(ii) 设 a 为正整数，线段 AB 上横坐标为整数的点的个数为 m ，请比较 m 与 $2a-2$ 的大小，并说明理由。

该试题兼具代数推理与几何直观，包含参数变量、整数点计数等复杂任务，具备梯度化认知负荷特征，适合开展 AI 支持下解题思维分析。

2 AI 支持下解题过程的认知负荷分析

该题在基础识别、代数推理与创新探究之间形成明显认知负荷梯度，体现维度分化特征。受题干条件的影响，学生需并行抛物线配方及对称轴转换等多重任务，产生较大的外在认知负荷[3]。其次，含参条件带来较高内在认知负荷，概念抽象，代数与几何条件相互交织，导致参数离散化为正整数后，连续变量转为离散计数问题，进一步提升了思维复杂度。此外，相关认知负荷体现在模式识别、类比迁移与归纳推理，需要学生完成图式的重构与应用[4]。

2.1 第（1）问：顶点纵坐标的求解

求顶点纵坐标属于基础模式识别任务，学生原有图式较为成熟，内在认知负荷较低。外在认知负荷主要来自参数带来的心理畏难情绪，并非任务本身逻辑难度。在这种情况下，AI 分步反馈可以辅助校验代数变形，减轻机械运算带来的外在认知负荷。但数学分式、根式、复杂表达式向 AI 输入时，格式转换会带来额外外在认知负荷。学生如果直接复制AI 推导结果，不跟进每一步变形逻辑，则会发生认知卸载，相关认知负荷无法有效生成。AI 通过代数引擎检验代数运算的配方过程，也可通过图像法求对称轴，或可动态演示 a 取不同数值时抛物线的变化，帮助学生直观理解顶点纵坐标。基于此，采用两种方法对抛物线进行解析，如下：

解法 1：由 $y=\frac{3}{a^2}x(2a-x)=\frac{3}{a^2}(-x^2+2ax)=-\frac{3}{a^2}(x^2-2ax)=-\frac{3}{a^2}\left[(x-a)^2-a^2\right]$

$=-\frac{3}{a^2}(x-a)^2+3$，得顶点纵坐标为 3 。

解法2：抛物线与 x 轴交点为 $x=0$ 和 $x=2a$，这两个点关于对称轴对称。对称轴为 $x=\dfrac{0+2a}{2}=a$，将 $x=a$ 代入原式 $y=\dfrac{3}{a^2}\cdot a(2a-a)=3$，顶点纵坐标为3。

2.2 第（2）问第（i）小题：$\dfrac{x_1}{a}$ 的求解

将 $y=\dfrac{3}{2}$ 代入解析式构建方程求解，整理为关于 $\dfrac{x}{a}$ 的一元二次方程求解，整体内在认知负荷偏低，难点集中于参数运算与无理数处理。它的外在认知负荷来源于多项式展开、合并同类项、根式化简等繁琐符号操作，这需要占用大量的工作记忆。

AI支持可为解题提供逐步反馈，减少运算细节消耗，而含分数、根式和变量表达式的输入需要额外认知资源，增加了外在负荷。基于此，将 $y=\dfrac{3}{2}$ 代入抛物线解析式：$\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{a^2}x(2a-x)$,两边同除以3，再乘 a^2 得：

$\dfrac{1}{2}a^2=2ax-x^2$，整理一元二次方程：$(\dfrac{x}{a})^2-2\dfrac{x}{a}+\dfrac{1}{2}=0$，由求根公式 $\dfrac{x}{a}=1\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，又已知 $(x_1<x_2)$，所以，$\dfrac{x_1}{a}=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$。

2.3 第（2）问第（ii）小题：比较 m 与 $2a-2$ 的大小

本小题认知负荷显著提升。内在认知负荷来源于整数点计数、对称性分析、分类讨论多重任务耦合，无理端点估值增加判断难度。外在认知负荷来自含参条件下整数点计数规则陌生，学生容易采取逐一代入枚举，大量重复计算，极易产生计算错误。这要求学生需同时处理连续区间和离散整数点两类数学对象，建立代数与几何之间的图式关联[5]，对思维综合度的要求高。正向方面，AI可以把复杂任务拆解为确定对称轴、判断端点位置、区间长度分析等子任务，也可以生成动态图像，通过数形结合，将抽象代数转化为直观的几何观察，减少繁琐符号推演，有效降低了内在与外在认知负荷。在这种情况下，教师可引导学生采用AI进行追问，通过对话提问逐步发现分类讨论标准。例如向AI提问“$a=1$时线段有哪些整数点?”，“$a=4$时情况有什么变化?”。

此外，在交互过程中可将二次函数对称性与整数网格计数建立联系，促进图式建构，提升认知负荷。比如，将抽象的“$\sqrt{2}a$”的整数部分”转化为直观的“线段覆盖了几个整数点”，用视觉图形简化了繁琐的数值推导步骤，使学习材料的感知复杂度显著降低，同时降低了内在与外在负荷。另一方面，图像解法将“二次函数的对称性”与“区间整数点计数”两类知识点有机融合。由于对称轴恰好在整数 a 处，区间左右对称展开覆盖的整数点必然关于 a 对称分布，其个数必然为 $2a-1$.这一发现将“对称性”与“奇数个整数点”建立了联系，促进了知识的深度加工与图式构建,提升了相关认知负荷。具体表现为如下两种解法：

解法1：(1)求区间范围：AB 横坐标区间为$[(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2})a,(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2})a]$，$\dfrac{\sqrt{2}}{2}\approx0.707$。

（2）求临界点：当 $x_1\le1$，即 $(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2})a\le1$，解得 $a\le\dfrac{2}{2-\sqrt{2}}=2+\sqrt{2}\approx3.414$。

因 a 为正整数，分两类讨论：当 $a=1,2,3(a\le 3)$，此时 $x_1\le 1$，区间左端点小于等于 1，右端点 $(1+\frac{\sqrt{2}}{2})a\ge 2a-1$。线段 AB 覆盖整数 $1,2,3\ldots,2a-1$，整数点个数 $m=2a-1$。$2a-1>2a-2$，即 $m>2a-2$。当 $a\ge 4$，此时 $x_1>1$，区间左端点大于 1，右端点 $(1+\frac{\sqrt{2}}{2})a<2a-1$。线段 AB 左右各少 1 个整数，整数点个数 $m=2a-3$. $2a-3<2a-2$，即 $m<2a-2$。

综上所述，当 $a=1,2,3$ 时，$m>2a-2$。当 a 为大于等于 4 的正整数时，$m<2a-2$。

解法2：抛物线与 x 轴的有两个交点 $(0,0)$ 和 $(2a,0)$，所以两交点之间的线段上横坐标是整数的点的个数为 $2a+1$。

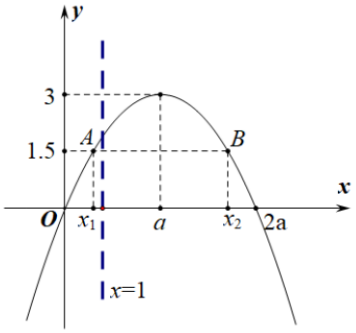


图1 $0<x_1<1$ 的情况

Figure 1: The case where $0<x_1<1$

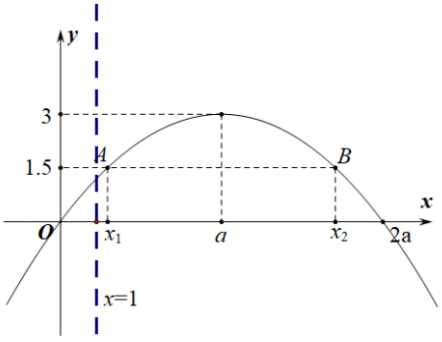


图2 $x_1>1$ 的情况

Figure 2: The case where $x_1>1$

因为 $x_1=(1-\frac{\sqrt{2}}{2})a$，$a$ 为正整数，所以 $x_1>0$，$-\frac{3}{a^2}<0$，抛物线开口向下，线段 AB 在 x 轴上方，所以点 A 和点 B 关于对称轴对称。故当 $0<x_1<1$ 时，$m=(2a+1)-2=2a-1>2a-2$。当 $x_1>1$，$m\le(2a+1)-4=2a-3<2a-2$。所以，当 $(1-\frac{\sqrt{2}}{2})a<1$ 时，即 $a<2+\sqrt{2}$，$m>2a-2$；当 $(1-\frac{\sqrt{2}}{2})a>1$，即 $a>2+\sqrt{2}\approx 3.414$，$m<2a-2$。

综上，当$a=1,2,3$时，$m>2a-2$。当$a\geq 4$时，$m<2a-2$。

3 讨论

对二次函数综合题[6]这类高认知负荷的数学问题，学生可从题本解构、负荷调控、智能工具赋能三个层面协同优化解题认知的过程。对题本进行有效解构，其核心在于强化数学“形式互译”训练，搭建二次函数不同表达式之间“形式-功能”的对应解题图式，消解非标准代数形式带来的符号认知障碍[7]。同时通过信息的分解与组合，对高密度复杂设问实施信息单元拆解、转译与逻辑梳理，帮助学习者快速识别问题类型并自动调用已有解题图式，从而把有限的工作记忆资源释放到核心推理环节。应当明确的是，优化认知负荷并非简单降低问题本身的思维难度，其根本目标是把认知资源从低效的信息检索、机械记忆等低价值认知活动中剥离出来，集中服务于数学逻辑推理与图式建构，并依托解题推动深层理解，实现学生数学思维品质的发展。在此基础上，可借助AI实现解题认知途径的进一步优化，通过设计结构化“追问单”、多模态表征问题，结合动态可视化模拟将抽象变量关系与内隐思维过程外化，助力学习者构建完整心理模型，推动学习由静态知识记忆转向动态思维方法迁移，实现AI与数学解题认知的深度融合。

4 结论

AI对数学解题三类认知负荷的影响具有显著阶段差异性。在基础识别、代数推理阶段，AI的拆解、可视化功能主要降低内在与外在认知负荷。在创新探究阶段，只有采用追问、交互式研究，才能够促进相关认知负荷增长，若直接输出完整答案则会诱发认知卸载，抑制相关认知负荷。然而，AI并非天然优化认知负荷，存在两面性。一方面可以消解机械运算、符号推演带来的额外负担。另一方面数学符号输入、过度依赖AI输出结论，会带来新外在负荷或者消解深度思考，导致不同水平学习者使用AI，其认知负荷会存在显著的个体差异。

参考文献

[1] 陈燕.基于认知负荷理论的数学解题错误研究[D].陕西师范大学,2010.
[2] 王兄.基于图式的数学学习研究[D].华东师范大学,2005.
[3] 蒋荣清. 基于认知负荷理论的数学课堂教学策略[J]. 数学通报, 2018，57(1):39-42+46.
[4] 汤志勇.基于认知负荷理论的中考数学压轴题教学研究[D].湖南师范大学,2018.
[5] 莫之敏. 二次函数系数的符号与其图像位置之间的关系[J]. 数理化学习(初中版), 2009,2:23-25.
[6] 莫慧敏. 基于认知负荷理论的初中二次函数教学研究[D]. 贵州师范大学, 2025.
[7] Fan K J. Penetration Strategies of the Number-Shape Combination Thought in Middle School Mathematics Teaching[J]. Journal of Education and Culture Studies, 2026, 10 (1):165-177.

基金项目：合肥师范学院研究生创新项目基金：基于“认知负荷理论”的高中函数概念与图像教学优化研究（2026yjs098），安徽省质量工程项目：面向科学计算能力培养的数值分析课程教学模式研究（2025jyxm0245），合肥师范学院校级科研项目：基于分片的隐参数优化表示（2024KY62）。

[1]**第1作者简介：**钱靓（2003-），女，合肥师范学院学科数学硕士在读，研究方向：中学数学教学。E-mail: 13966183341@163.com。

[*]**通讯作者简介：**沈南山（1964-），男，博士研究生，教授，研究方向：数学课程与教学论研究；E-mail:18156035380@163.com。